

Lecția 5: Geometrie în Arhitectură - Proporții, Simetrie și Structuri

Obiective: Elevii vor recunoaște și vor aplica principii geometrice în designul arhitectural, vor înțelege raportul de aur și structurile de susținere.

I. PARTEA TEORETICĂ

1. Matematica Frumuseții: Proporția Divină

Raportul de Aur ($\Phi \approx 1.6180339887\dots$)

Definiție: Se spune că un segment AB este împărțit în secțiunea de aur de punctul C dacă:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} = \Phi \approx 1.6180339887\dots$$

Ecuația caracteristică:

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \quad \text{sau} \quad \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

Construcție geometrică simplă:

1. Desenează un pătrat
2. Împarte baza în jumătate
3. Trasează diagonală până la mijlocul bazei
4. Extinde baza cu lungimea diagonalei
5. Obții un dreptunghi de aur!

Unde găsim Raportul de Aur?

- Fațada Partenonului din Atena
- Mona Lisa a lui Leonardo da Vinci
- Multe catedrale gotice
- Corpul uman (raport între falange)
- Spirala de aur în natură (cochilia de nautilus)

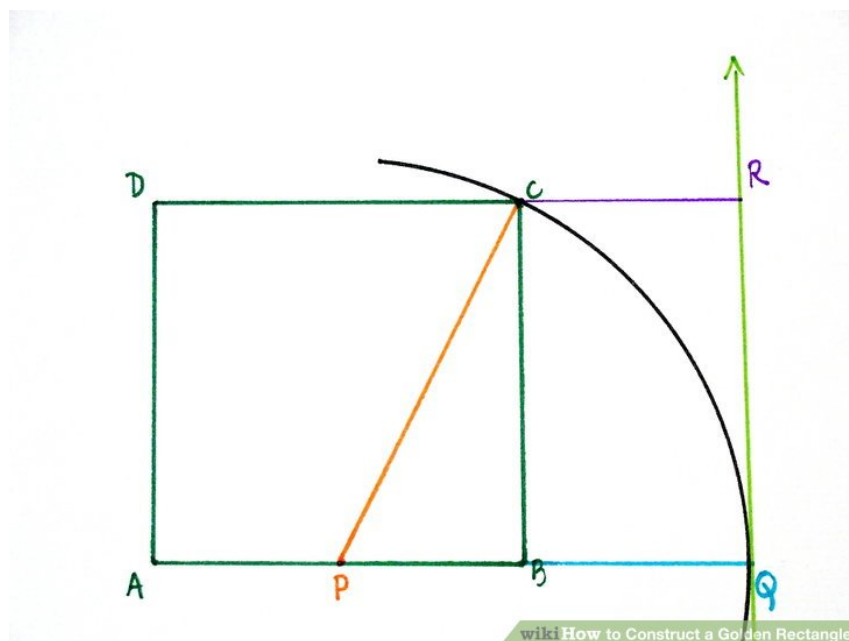


Figura 1: Construcția geometrică a dreptunghiului de aur.

2. Simetria - Ordinea în Arhitectură

Tipuri de simetrie:

- Simetrie axială (ogindire): Fațade clasice, biserici
- Simetrie centrală: Rotonde, planuri circulare
- Simetrie de translație: Colonade, serii de ferestre
- Simetrie de rotație: Cupole, structuri circulare

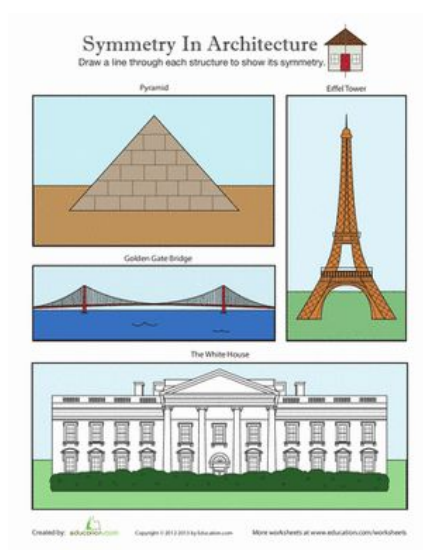


Figura 2: Exemple de simetrie în arhitectură clasică și modernă.

Simetria bilaterală în planuri: Planurile caselor moderne folosesc adesea simetria față de axa centrală pentru:

- Distribuție echilibrată a încăperilor
- Economie de materiale
- Estetică plăcută

3. Geometria Structurilor de Susținere

Arcuri și Bolți - Geniu Roman și Gotic

Principiul fundamental: O structură arcuită transformă forța gravitațională verticală în forțe compresive laterale.

Elementele unui arc:

- Deschidere (L): distanța între reazeme
- Săgeată (f sau s): înălțimea maximă a arcului
- Raza (R): raza cercului din care provine arcul

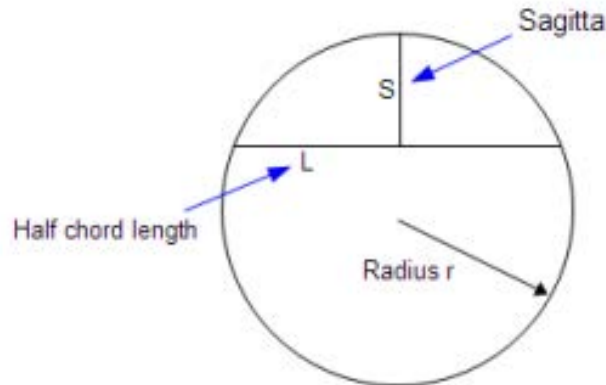


Figura 3: Elemente geometrice ale unui arc.

Formula relației pentru arc de cerc:

$$R = \frac{L^2 + 4f^2}{8f}$$

$$L = 2\sqrt{2Rf - f^2}$$

$$f = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

Triangulația în Structuri

Grinzi cu zăbrele (ferme): Utilizate în acoperișuri, poduri, turnuri.

Principiu: Triunghiul este singura formă rigidă. Pătratele și alte poligoane se deformează sub încărcare.



Figura 4: Structuri triunghiulate în arhitectură și inginerie.

4. Geometria Spațiului Interior

Proporțiile camerelor

Studii arată că camerele cu raportul laturilor aproape de Φ (1.618) sunt percepute ca mai plăcute.

Exemple practice:

- Living: $5\text{m} \times 8\text{m}$ (raport 1.6)
- Dormitor: $3.5\text{m} \times 5.5\text{m}$ (raport 1.57)

Cercuri și semicercuri în design

- Rozete în arhitectura gotică
- Oculus (ochi) în Panteon
- Arcade semicirculare romane
- Cupole semisferice

II. EXEMPLU REZOLVAT COMPLET

Problema: Un arhitect proiectează o fereastră în formă de arc semicircular perfect, încadrată într-un dreptunghi auric. Dimensiunile dreptunghiului sunt conforme raportului de aur, iar înălțimea totală a ferestrei este de 2.4 metri.

Cerințe:

- a) Determină lățimea ferestrei (conform raportului de aur)
- b) Calculează raza arcului semicircular
- c) Determină înălțimea părții dreptunghiulare de sub arc
- d) Calculează lungimea arcului semicircular
- e) Calculează suprafața totală a ferestrei

REZOLVARE DETALIATĂ:

Pasul 1: Determinarea lățimii conform raportului de aur

Știm $H = 2.4$ m și $\Phi \approx 1.618$. Pentru un dreptunghi de aur:

$$\frac{H}{L} = \Phi \Rightarrow L = \frac{H}{\Phi} = \frac{2.4}{1.618} \approx 1.483 \text{ m}$$

Pasul 2: Calculul razei arcului semicircular

Arcul este semicerc perfect, deci $L = 2R$:

$$R = \frac{L}{2} = \frac{1.483}{2} \approx 0.7415 \text{ m}$$
$$f = R = 0.7415 \text{ m}$$

Pasul 3: Înălțimea părții dreptunghiulare

$$H = R + h \Rightarrow h = H - R = 2.4 - 0.7415 = 1.6585 \text{ m}$$

Pasul 4: Lungimea arcului semicircular

$$L_{arc} = \pi R = 3.1416 \cdot 0.7415 \approx 2.329 \text{ m}$$

Pasul 5: Suprafața totală a ferestrei

$$A_{semi} = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3.1416 \cdot 0.7415^2}{2} = \frac{3.1416 \cdot 0.5498}{2} \approx 0.8635 \text{ m}^2$$
$$A_{rect} = L \cdot h = 1.483 \cdot 1.6585 \approx 2.460 \text{ m}^2$$
$$A_{total} = 0.8635 + 2.460 \approx 3.3235 \text{ m}^2$$

Verificare raport aur:

$$\frac{H}{L} = \frac{2.4}{1.483} \approx 1.618 \checkmark$$

Răspuns final:

- Lățime ≈ 1.48 m
- Raza arc ≈ 0.74 m
- Înălțime dreptunghi ≈ 1.66 m
- Lungime arc ≈ 2.33 m
- Suprafață totală ≈ 3.32 m²

III. SET DE 10 EXERCITII PENTRU LECȚIE (cu rezolvări complete)

Exercițiul 1 (Raport de aur simplu)

Enunț: Împarte un segment de 10 cm în medie și extremă raport (secțiunea de aur). Găsește lungimea părții mai mari.

Rezolvare: Fie x partea mai mare, $10 - x$ partea mai mică.

$$\frac{x}{10 - x} = 1.618 \Rightarrow x = 1.618(10 - x) = 16.18 - 1.618x$$

$$2.618x = 16.18 \Rightarrow x = \frac{16.18}{2.618} \approx 6.18 \text{ cm}$$

Partea mică: $10 - 6.18 = 3.82$ cm. Verificare: $6.18/3.82 \approx 1.617 \approx \Phi$.

Exercițiul 2 (Dreptunghi de aur)

Enunț: Dreptunghiul de aur are lățimea de 4 m. Care este lungimea lui?

Rezolvare:

$$L = 4\Phi = 4 \cdot 1.618 \approx 6.472 \text{ m}$$

Exercițiul 3 (Simetrie axială)

Enunț: Desenează axa de simetrie pentru literele A, H, M. Câte axe au?

Rezolvare:

- A: 1 axă verticală
- H: 1 axă orizontală și 1 verticală (dacă fontul este simetric)
- M: 1 axă verticală

În fonturi standard: A(1), H(2), M(1).

Exercițiul 4 (Arc semicircular perfect)

Enunț: Un arc semicircular perfect are deschiderea de 6 m. Care este săgeata lui?

Rezolvare:

$$L = 2R \Rightarrow R = \frac{6}{2} = 3 \text{ m}, \quad f = R = 3 \text{ m}$$

Exercițiul 5 (Arc cu săgeată dată)

Enunț: Pentru un arc cu $L = 8 \text{ m}$ și $f = 1.5 \text{ m}$, calculează raza R .

Rezolvare:

$$R = \frac{L^2 + 4f^2}{8f} = \frac{8^2 + 4 \cdot 1.5^2}{8 \cdot 1.5} = \frac{64 + 9}{12} = \frac{73}{12} \approx 6.083 \text{ m}$$

Exercițiul 6 (Deschidere din rază și săgeată)

Enunț: Dacă raza unui arc este 10 m și săgeata este 2 m, care este deschiderea?

Rezolvare:

$$10 = \frac{L^2 + 4 \cdot 2^2}{8 \cdot 2} = \frac{L^2 + 16}{16} \Rightarrow L^2 + 16 = 160 \Rightarrow L^2 = 144 \Rightarrow L = 12 \text{ m}$$

Exercițiul 7 (Fronton triunghiular)

Enunț: Un triunghi isoscel cu baza de 10 m și înălțimea de 4 m poate fi considerat un fronton. Calculează aria lui.

Rezolvare:

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{10 \cdot 4}{2} = 20 \text{ m}^2$$

Exercițiul 8 (Verificare raport cameră)

Enunț: O cameră are dimensiunile $4.2 \text{ m} \times 6.8 \text{ m}$. Este aproape de un dreptunghi de aur?

Rezolvare:

$$\frac{6.8}{4.2} \approx 1.619, \quad \Phi \approx 1.618$$

Diferența: 0.001 (aprox. 0.06%). **DA, este foarte apropiat.**

Exercițiul 9 (Arc circular - unghi la centru)

Enunț: Un arc are coarda $L = 12 \text{ m}$ și raza $R = 10 \text{ m}$. Calculează unghiul la centru θ folosind:

$$\frac{L}{2} = R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Rezolvare:

$$\frac{12}{2} = 6 = 10 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0.6$$

$$\frac{\theta}{2} = \arcsin(0.6) \approx 36.87^\circ \Rightarrow \theta \approx 73.74^\circ \approx 1.287 \text{ rad}$$

Exercițiul 10 (Fereastră circulară)

Enunț: Un oculus are diametrul de 0.9 m. Care este circumferința sa?

Rezolvare:

$$C = \pi D = 3.1416 \cdot 0.9 \approx 2.827 \text{ m}$$

IV. SET DE 10 EXERCITII PENTRU ACASĂ (TEMA)

1. Raport de aur invers: Dacă partea mai mare a unui segment împărțit în secțiunea de aur este 8 cm, care este lungimea întregului segment?
2. Fațadă armonioasă: Fațada unei clădiri are înălțimea 12 m. Pentru un dreptunghi de aur, care ar trebui să fie lățimea?
3. Arc gotic: Un arc ogival are deschiderea 4 m și săgeata 3 m. Calculează raza arcului.
4. Suprafață semicirculară: O fereastră semicirculară are diametrul 1.6 m. Care este aria?
5. Simetrie în plan: O casă e simetrică față de axă. Dacă o cameră are coordonatele (3,4), care sunt coordonatele camerei simetrice?
6. Proportii cameră: Care ar fi lățimea ideală a unei camere cu înălțimea 2.7 m, conform raportului de aur?
7. Lungime arc: Un arc de cerc cu raza 5 m are unghiul la centru 60° . Care este lungimea arcului?
8. Triunghi echilateral: Un acoperiș are forma unui triunghi echilateral cu latura 8 m. Care este înălțimea?
9. Ferestre geminate: Două ferestre identice (1.2 m lățime fiecare) sunt așezate simetric față de axa unei uși de 1 m. Care este distanța dintre ferestre dacă ansamblul e simetric?
10. Cupolă semisferică: O cupolă semisferică are diametrul 10 m. Care este suprafața curbei (fără bază)?

V. REZOLVĂRI SCHEMATICE PENTRU TEMA

1. Partea mică = $8/\Phi \approx 4.94$ cm; total = $8 + 4.94 = 12.94$ cm
2. Lăţime = $12/\Phi \approx 7.42$ m
3. $R = \frac{4^2 + 4 \cdot 3^2}{8 \cdot 3} = \frac{16 + 36}{24} = \frac{52}{24} \approx 2.167$ m
4. $R = 0.8$ m; $A = \frac{\pi \cdot 0.8^2}{2} \approx 1.005$ m²
5. Cameră simetrică: $(-3, 4)$
6. Lăţime = $2.7\Phi \approx 4.37$ m
7. $L_{arc} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi R = \frac{1}{6} \cdot 2\pi \cdot 5 \approx 5.236$ m
8. $h = \frac{8\sqrt{3}}{2} \approx 6.928$ m
9. Lăţime totală: $1.2 + 1 + 1.2 = 3.4$ m; distanţa dintre ferestre = $3.4 - 2 \cdot 1.2 = 1.0$ m
10. Suprafaţa semisferei: $2\pi R^2 = 2\pi \cdot 5^2 \approx 157.08$ m²